第 2 节 抛物线定义与几何性质综合问题（★★★）

内容提要

抛物线上的点到焦点的距离问题常用抛物线的定义求解，但除定义外，可能还需结合图形（如等腰、等边、直角三角形，矩形等）的几何性质才能求解问题，因此本节将归纳高考中抛物线常见的图形和几何条件的处理思路.

典型例题

类型Ⅰ：定义与特殊图形

【例 1】已知抛物线 $C:y^2=12x$ 的焦点为 F，准线为 l，点 A 在 C 上，且 $AB\perp l$ 于 B，若 $\angle FAB=\dfrac{2\pi}{3}$，则 $|BF|=$（　　）

（A）$2\sqrt{3}$　　（B）$4\sqrt{3}$　　（C）$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　　（D）$\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

解析： 如图，涉及抛物线上的点向准线作垂线，想到抛物线定义，

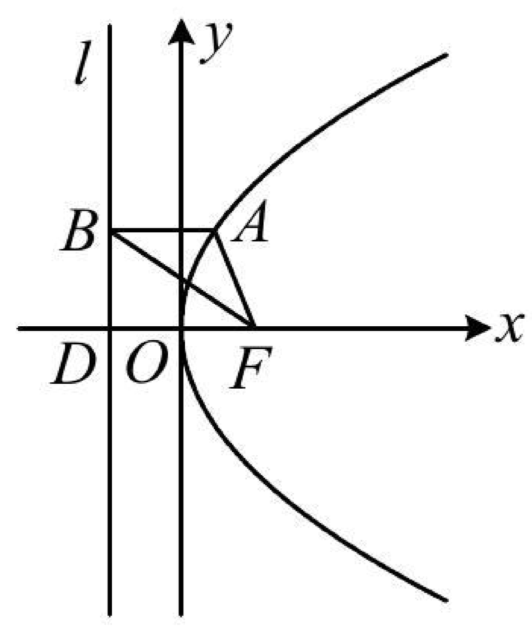
由题意，$|AB|=|AF|$，又 $\angle FAB=\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $\angle ABF=\angle AFB=\dfrac{\pi}{6}$，

要求 $|BF|$，注意到 ΔBFD 为直角三角形且 $|FD|$ 已知，所以将条件转移到该三角形中来看，

记准线与 x 轴交于点 D，抛物线的焦点为 $F(3,0)$，准线为 $l:x=-3$，所以 $|FD|=6$，

由 $\angle ABF=\dfrac{\pi}{6}$ 可得 $\angle DBF=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $|BF|=\dfrac{|FD|}{\sin\angle DBF}=\dfrac{6}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=4\sqrt{3}$.

答案： B



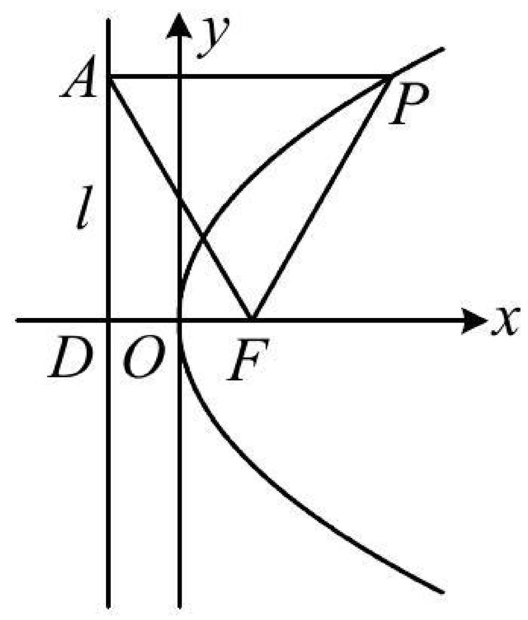
【反思】利用抛物线的定义可知，抛物线上的点 A 与焦点 F，以及点 A 在准线上的射影 B 所围成的三角形 ABF 是等腰三角形，且 FB 为 $\angle AFO$ 的角平分线.

【例 2】已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，点 P 在 C 上，$PA\perp l$ 于 A，若 $|PA|=|AF|$，则 $|AF|=$ ______.

解析： 如图，C 的焦点为 $F(1,0)$，准线为 $l:x=-1$，设 l 与 x 轴交于点 D，由抛物线定义，$|PA|=|PF|$，又 $|PA|=|AF|$，所以 ΔPAF 是正三角形，要算 $|AF|$，图中已知的长度只有 $|FD|$，故放到 ΔADF 中来看，

因为 $\angle PAF=60^\circ$，所以 $\angle DAF=30^\circ$，又 $|FD|=2$，所以 $|AF|=\dfrac{|FD|}{\sin\angle DAF}=\dfrac{2}{\sin 30^\circ}=4$.

答案：4



【变式】已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，准线为l，以F为圆心作圆与C交于A，B两点，与l交于D，E两点，$|AB|=|DE|=4\sqrt{3}$，则$p=$_____.

解析：如图，可尝试通过分析几何关系，求出点A的坐标，代入抛物线方程求p，

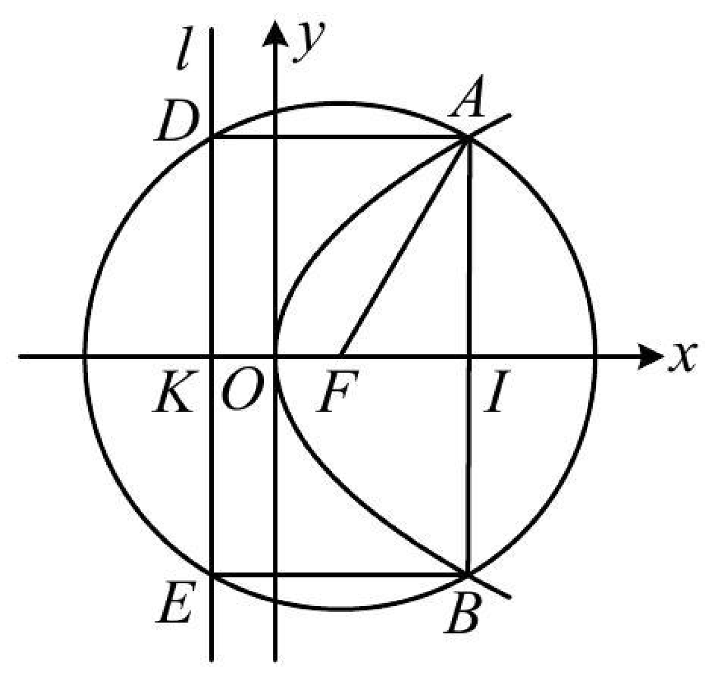
因为$|AB|=|DE|=4\sqrt{3}$，所以AB、DE是同一圆中等长的弦，结合对称性可得四边形$ABED$是矩形，

设准线l与x轴交于点K，AB与x轴交于点I，则$|KF|=p$，因为$|AB|=|DE|$，所以$|FI|=|KF|=p$，

故$|OI|=|OF|+|FI|=\dfrac{3p}{2}$，又$|AI|=\dfrac{1}{2}|AB|=2\sqrt{3}$，所以$A(\dfrac{3p}{2},2\sqrt{3})$，

代入抛物线方程可得：$(2\sqrt{3})^2=2p\cdot\dfrac{3p}{2}$，解得：$p=2$.

答案：2



【例 3】已知抛物线$E:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，点A是抛物线E的准线与坐标轴的交点，点P在抛物线E上，若$\angle PAF=30^\circ$，则$\dfrac{|PA|}{|PF|}=$_____，$\sin\angle PFA=$_____.

解析：涉及$|PF|$，常用抛物线定义转化为P到准线的距离，

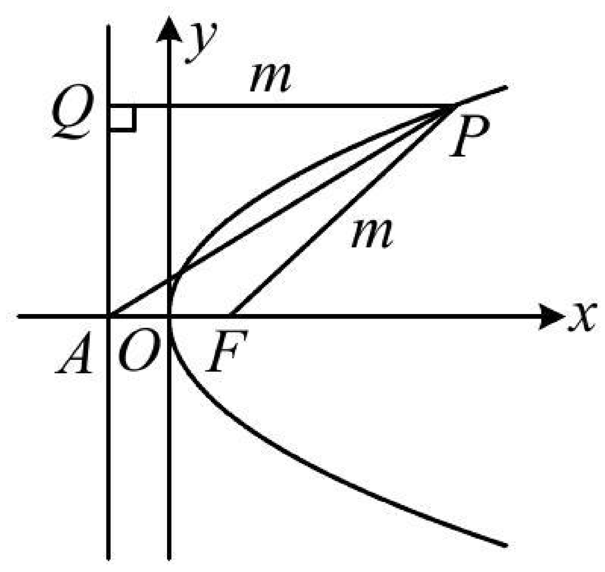
如图，作$PQ\perp$准线于Q，因为$\angle PAF=30^\circ$，所以$\angle PAQ=60^\circ$，设$|PF|=m$，则$|PQ|=m$，

所以$|PA|=\dfrac{|PQ|}{\sin\angle PAQ}=\dfrac{m}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2\sqrt{3}m}{3}$，故$\dfrac{|PA|}{|PF|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

在ΔPAF中，PA和PF所对的角恰好分别是$\angle PFA$和$\angle PAF$，故可用正弦定理求$\sin\angle PFA$，

由正弦定理，$\dfrac{|PA|}{\sin\angle PFA}=\dfrac{|PF|}{\sin\angle PAF}$，所以$\sin\angle PFA=\dfrac{|PA|\sin\angle PAF}{|PF|}=\dfrac{\frac{2\sqrt{3}m}{3}\times\frac{1}{2}}{m}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

答案：$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{3}$



【变式】已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为$F(1,0)$，准线与x轴交于点A，点M在第一象限且在抛物线C上，则当$\frac{|MF|}{|MA|}$取得最小值时，直线AM的方程为______.

解析：涉及$|MF|$，想到用定义转化为M到准线的距离，如图1，作$MN\perp$准线于N，则$|MF|=|MN|$，

所以$\frac{|MF|}{|MA|}=\frac{|MN|}{|MA|}=\sin\angle MAN$，要使$\sin\angle MAN$最小，只需$\angle MAN$最小，此时的情形如图2，

图2中直线AM与抛物线相切，可联立方程用判别式$\Delta=0$求直线的方程，

抛物线C的准线为$x=-1$，所以$A(-1,0)$，故可设图2中切线AM的方程为$x=my-1$，

联立$\begin{cases}x=my-1\\y^2=4x\end{cases}$消去$x$整理得：$y^2-4my+4=0$，

因为直线AM与抛物线相切，所以$\Delta=(-4m)^2-4\times1\times4=0$，解得：$m=\pm1$，

因为M在第一象限，所以$m=1$，故直线AM的方程为$x=y-1$，即$x-y+1=0$.

答案：$x-y+1=0$

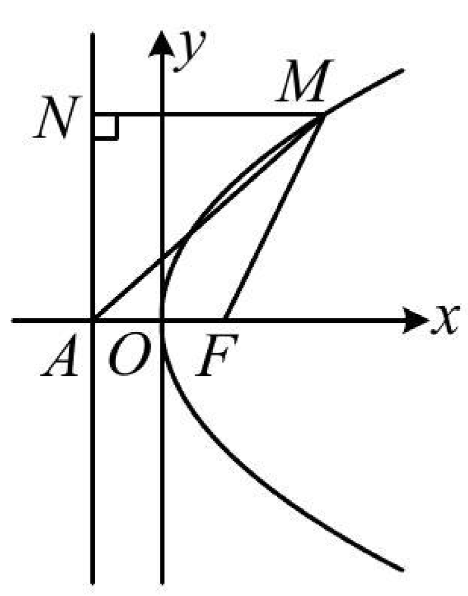


图1

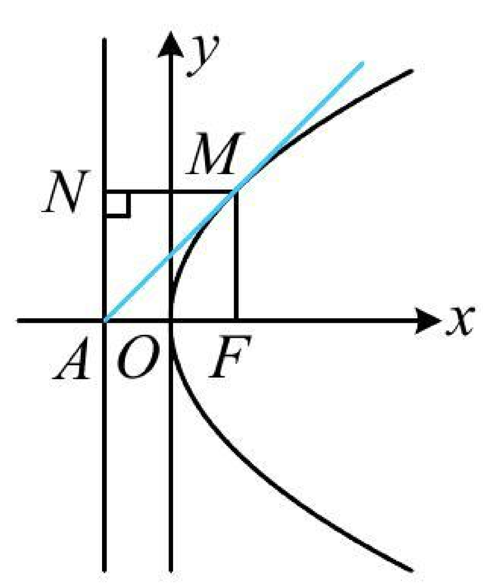


图2

类型Ⅱ：定义与线段比例、相似相关

【例4】设抛物线$y^2=4x$的焦点为F，不经过焦点的直线上有三个不同的点A，B，C，其中点A，B在抛物线上，点C在y轴上，B在线段AC上，则ΔBCF与ΔACF的面积之比是（　　）

（A）$\frac{|BF|-1}{|AF|-1}$　（B）$\frac{|BF|^2-1}{|AF|^2-1}$　（C）$\frac{|BF|+1}{|AF|+1}$　（D）$\frac{|BF|^2+1}{|AF|^2+1}$

解析：如图，两个三角形有相同的高（点F到直线AC的距离），故只需分析底边之比$\frac{|BC|}{|AC|}$. 选项中有$|AF|$

和$|BF|$，由此想到抛物线定义，故过 A，B 向准线作垂线，作出来就发现可用相似比来分析$\dfrac{|BC|}{|AC|}$，

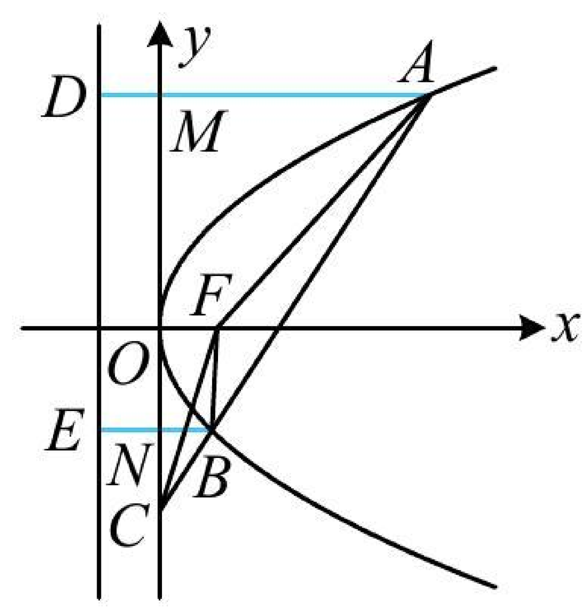
过 A，B 作抛物线准线 $x=-1$ 的垂线分别交 y 轴于 M，N，垂足分别为 D，E，则 $\Delta CBN\backsim\Delta CAM$，

所以 $\dfrac{|BC|}{|AC|}=\dfrac{|BN|}{|AM|}=\dfrac{|BE|-1}{|AD|-1}$ ①，

由抛物线定义，$|BE|=|BF|$，$|AD|=|AF|$，

代入①得：$\dfrac{|BC|}{|AC|}=\dfrac{|BF|-1}{|AF|-1}$，所以 $\dfrac{S_{\Delta BCF}}{S_{\Delta ACF}}=\dfrac{|BF|-1}{|AF|-1}$.

答案：A



【反思】抛物线中与焦点 F 有关的线段比例问题中，过抛物线上的点向准线作垂线，借助抛物线定义来分析图形的几何特征，是常规操作.

【变式 1】过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 且斜率 $k>0$ 的直线交抛物线于 A，B 两点，交其准线 l 于点 C（B 在 F，C 之间），且 $|BC|=2|BF|$，$|AF|=12$，则直线 AB 的方程为_____.

解析：如图，作 $AA'\perp$准线于 A'，$BB'\perp$准线于 B'，设准线与 x 轴交于点 H，

先求直线 AB 的倾斜角 θ，可将$|BC|=2|BF|$转化为$|BB'|$和$|BC|$的关系，求得 $\angle CBB'$，该角等于 θ，

由抛物线定义，$|BF|=|BB'|$，代入$|BC|=2|BF|$可得$|BC|=2|BB'|$，所以 $\cos\angle CBB'=\dfrac{|BB'|}{|BC|}=\dfrac{1}{2}$，

故 $\angle CBB'=60^\circ$，又 $BB'\ /\!/\ x$ 轴，所以 $\theta=60^\circ$，故直线 AB 的斜率 $k=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$，

求直线 AB 的方程还差 F 的坐标，先求$|HF|$，可利用相似比转化为求$|AA'|$，

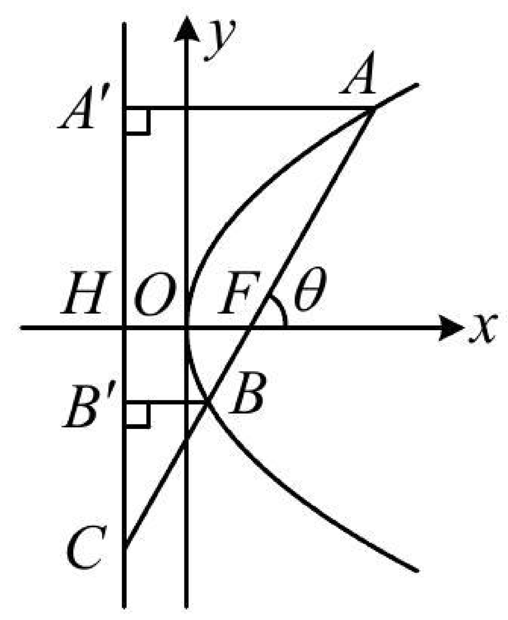
因为 $AA'\ /\!/\ x$ 轴，所以 $\angle CAA'=\theta=60^\circ$，故$|AA'|=|AC|\cos\angle CAA'=\dfrac{1}{2}|AC|$ ①，

由抛物线定义，$|AA'|=|AF|$，代入①可得$|AF|=\dfrac{1}{2}|AC|$，所以 F 为 AC 中点，

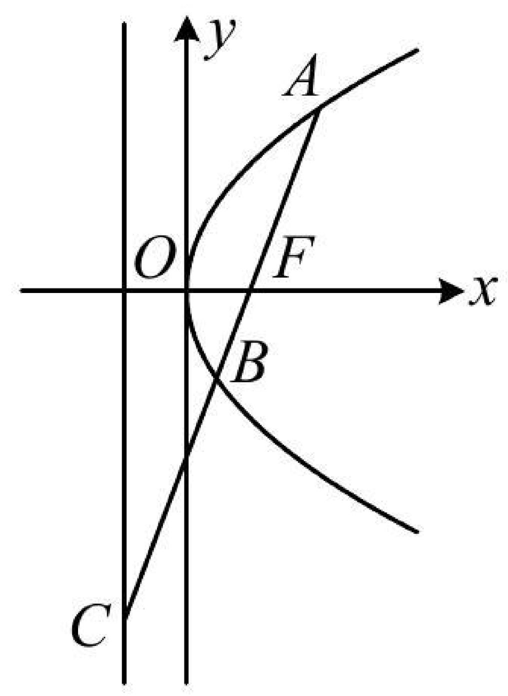
结合 $FH/\!/\ AA'$ 可得$|FH|=\dfrac{1}{2}|AA'|=\dfrac{1}{2}|AF|=6$，所以 $F(3,0)$，

故直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-3)$，即 $y=\sqrt{3}x-3\sqrt{3}$.

答案：$y=\sqrt{3}x-3\sqrt{3}$



【变式 2】如图，过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 作直线与抛物线及其准线分别交于 A,B,C 三点，若 $\overrightarrow{FC}=4\overrightarrow{FB}$，则 $|AB|=$______.



解析：抛物线的准线为 $x=-1$，焦点为 $F(1,0)$，设准线与 x 轴交于点 H，则 $|FH|=2$，

如图，作 $AA'\perp$ 准线于 A'， $BB'\perp$ 准线于 B'，则 $|AF|=|AA'|$， $|BF|=|BB'|$，

由 $\overrightarrow{FC}=4\overrightarrow{FB}$ 可分析长度比值，故设 $|BF|$ 为变量，并表示其它线段，再用相似比建立方程求解该变量，

设 $|BF|=m$，则 $|BB'|=m$，因为 $\overrightarrow{FC}=4\overrightarrow{FB}$，所以 $|BC|=3|BF|=3m$， $|CF|=4m$，

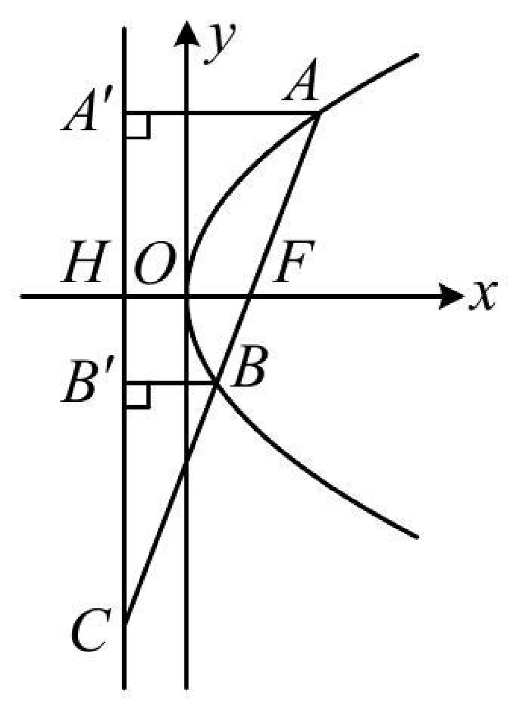
因为 $\Delta CBB'\backsim\Delta CFH$，所以 $\dfrac{|BB'|}{|FH|}=\dfrac{|BC|}{|CF|}$，即 $\dfrac{m}{2}=\dfrac{3m}{4m}$，解得： $m=\dfrac{3}{2}$，所以 $|BF|=\dfrac{3}{2}$， $|CF|=6$，

还需求出 $|AF|$，做法和求 $|BF|$ 类似，可设其为未知数，利用相似比来建立方程求解，

设 $|AF|=|AA'|=n$，则 $|AC|=|AF|+|CF|=n+6$，由 $\Delta CFH\backsim\Delta CAA'$ 可得 $\dfrac{|CF|}{|AC|}=\dfrac{|FH|}{|AA'|}$，

即 $\dfrac{6}{n+6}=\dfrac{2}{n}$，解得： $n=3$，所以 $|AF|=3$，故 $|AB|=|AF|+|BF|=3+\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2}$.

答案： $\dfrac{9}{2}$



【反思】抛物线小题中出现未知长度的比例关系时，往往可设一段长，利用定义以及相似等几何性质求解

其它线段的长.

强化训练

1.（2022·安徽合肥模拟·★★）已知抛物线$C:y^2=4\sqrt{3}x$的焦点为F，准线为l，过抛物线上一点P作准线的垂线，垂足为Q，若$\angle PFQ=60^{\circ}$，则$|PF|=$（　　）

（A）$4\sqrt{3}$　（B）$2\sqrt{3}$　（C）$\sqrt{3}$　（D）6

2.（2022·湖南岳阳模拟·★★★）过抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点F且斜率$k>0$直线与C交于A，B两点，A在第一象限，过A作准线的垂线，垂足为H，若$\angle HFB$被x轴平分，则$k=$_____.

3.（2022·广东汕头模拟·★★★）已知抛物线$C:y^2=6x$的焦点为F，A为C上一点且在第一象限，以F为圆心，FA为半径的圆与抛物线C的准线交于M，N两点，且A，F，M三点共线，则$|AF|=$_____.

4.（2023·河南洛阳模拟·★★★）已知抛物线$x^2=4y$的焦点为F，准线为l，过抛物线上一点P作l的垂线，垂足为A，若$\overrightarrow{FA}$在x轴上的投影向量的长为$2\sqrt{3}$，则ΔPAF的面积为（　　）

（A）$2\sqrt{3}$　（B）$4\sqrt{3}$　（C）$\sqrt{3}$　（D）6

5.（2013·江西卷·★★★）已知点$A(2,0)$，抛物线$C:x^2=4y$的焦点为F，射线FA与抛物线C相交于点M，与其准线相交于点N，则$|FM|:|MN|=$（　　）

（A）$2:\sqrt{5}$　（B）$1:2$　（C）$1:\sqrt{5}$　（D）$1:3$

6.（2014 • 新课标Ⅰ卷 • ★★★）已知抛物线$C:y^2=8x$的焦点为F，准线为l，P是l上一点，Q是直线PF与C的一个交点，若$\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，则$|QF|=$（　　）

（A）$\frac{7}{2}$　　（B）$\frac{5}{2}$　　（C）3　　（D）2

7.（2022 • 广东开平模拟 • ★★★）已知抛物线$C:y^2=16x$的焦点为F，M是C上一点，FM的延长线交y轴于点N，若$3\overrightarrow{FM}=2\overrightarrow{MN}$，则$|FN|=$_____.

8.（2022 • 北京模拟 • ★★★）已知抛物线C的焦点为F，准线为l，过F的直线m与C交于点A和B，点A在l上的投影为D，若$|AB|=|BD|$，则$\frac{|AB|}{|AF|}=$（　　）

（A）$\frac{3}{2}$　　（B）2　　（C）$\frac{5}{2}$　　（D）3

9．（2022 • 河南模拟 • ★★★）过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A，B 两点，交其准线于点 C，若点 F 是 AC 的中点，且 $|AF|=4$，则 $|AB|=$_____.

10．（2022 • 重庆巫山模拟 • ★★★）抛物线 $E:y^2=4x$ 的焦点为 F，过 F 的直线与 E 交于 A，B 两点，延长 FB 交 E 的准线 l 于点 C，过 A，B 作 l 的垂线，垂足分别为 M，N，若 $|BC|=2|BN|$，则 ΔAFM 的面积为（　　）

（A）$4\sqrt{3}$　（B）4　（C）$2\sqrt{3}$　（D）2

11．（2022 •黑龙江齐齐哈尔模拟 •★★★★）已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的准线 $x=-1$ 与 x 轴交于点 A，F 为 C 的焦点，B 是 C 上第一象限内的一点，则当 $\dfrac{|BF|}{|AB|}$ 取得最小值时，ΔABF 的面积为（　　）

（A）2　（B）3　（C）4　（D）6